4章　微分方程式

§2　2階微分方程式（p.113～p.127）

問1

（1）$x = C_1t^{-1} + C_2t^2$より

$$\frac{dx}{dt} = -C_1t^{-2} - 2C_2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2C_1t^{-3} - 2C_2$$

これを，微分方程式に代入すると

$$t^2(2C_1t^{-3} - 2C_2) = 2(C_1t^{-1} + C_2t^2)$$
$$= 2x$$

また, 2個の任意定数を含むから，一般解である.

（2）$x = C_1t^{-1} + C_2t^2$に条件を代入すると

$1 = C_1 + C_2$・・・①

$\dfrac{dx}{dt} = -C_1t^{-2} - 2C_2t$について，$C_1$，$C_2$は任意定数

であるから，$\dfrac{dx}{dt} = C_1t^{-2} + 2C_2t$とする.

条件を代入して

$2 = C_1 + 2C_2$・・・②

①，②より，C_1，C_2について解くと

$C_1 = 0$，$C_2 = 1$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x = t^2}$

（3）$x = C_1t^{-1} + C_2t^2$に条件を代入すると

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 & \cdots ① \\ 2 = C_1 \cdot 2^{-1} + C_2 \cdot 2^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$C_2 = 1 - C_1$

これを，②に代入して

$$2 = 2^{-1}C_1 + 4(1 - C_1)$$
$$4 = C_1 + 8 - 8C_1$$
$$7C_1 = 4$$
$$C_1 = \frac{4}{7}$$
$$C_2 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{7}t^{-1} + \frac{3}{7}t^2}$$

問2

（1）$x = e^t$について

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t$$

これらを微分方程式に代入すると

左辺$= e^t - 3e^t + 2e^t = 0$

よって，$x = e^t$は与えられた微分方程式の解である.

同様に，$x = e^{2t}$について

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4e^{2t}$$

これらを微分方程式に代入すると

左辺$= 4e^{2t} - 3 \cdot 2e^{2t} + 2e^{2t}$

$= 4e^{2t} - 6e^{2t} + 2e^{2t} = 0$

よって，$x = e^{2t}$は与えられた微分方程式の解である.

（2）$x = C_1e^t + C_2e^{2t}$より

$$\frac{dx}{dt} = C_1e^t + 2C_2e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1e^t + 4C_2e^{2t}$$

これらを微分方程式に代入すると

左辺$= C_1e^t + 4C_2e^{2t} - 3(C_1e^t + 2C_2e^{2t}) + 2(C_1e^t + C_2e^{2t})$

$= C_1e^t + 4C_2e^{2t} - 3C_1e^t - 6C_2e^{2t} + 2C_1e^t + 2C_2e^{2t}$

$= 0$

よって，$x = C_1e^t + C_2e^{2t}$は与えられた微分方程式の

解である.

問3

（1）$(e^t)' = e^t$

$(e^{2t})' = 2e^{2t}$

よって，ロンスキアンは

$$W(e^t,\ e^{2t}) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix}$$
$$= 2e^{3t} - e^{3t}$$
$$= \boldsymbol{e^{3t}} \neq 0$$

したがって，関数e^t，e^{2t}は線形独立である．

（２）$(t^m)' = me^{m-1}$

$(t^n)' = ne^{n-1}$

よって，ロンスキアンは

$$W(t^m,\ t^n) = \begin{vmatrix} t^m & t^n \\ mt^{m-1} & nt^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= t^m nt^{n-1} - t^n mt^{m-1}$$

$$= nt^{m+n-1} - mt^{m+n-1}$$

$$= \boldsymbol{(n-m)t^{m+n-1}}$$

$n \neq m$であるから，$(n-m)t^{m+n-1}$が恒等的に0になることはない．

したがって，関数t^m，t^nは線形独立である．

（３）$(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}$

$\left(e^{\beta t}\right)' = \beta e^{\beta t}$

よって，ロンスキアンは

$$W\left(e^{\alpha t},\ e^{\beta t}\right) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ \alpha e^{\alpha t} & \beta e^{\beta t} \end{vmatrix}$$

$$= \beta e^{(\alpha+\beta)t} - \alpha e^{(\alpha+\beta)t}$$

$$= \boldsymbol{(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)t}}$$

$\alpha \neq \beta$であるから，$(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)t}$が恒等的に$0$になることはない．

したがって，関数$e^{\alpha t}$，$e^{\beta t}$は線形独立である．

（４）$(e^{pt}\cos qt)' = pe^{pt}\cos qt - qe^{pt}\sin qt$

$$= (p\cos qt - q\sin qt)e^{pt}$$

$(e^{pt}\sin qt)' = pe^{pt}\sin qt + qe^{pt}\cos qt$

$$= (p\sin qt + q\cos qt)e^{pt}$$

よって，ロンスキアンは

$W(e^{pt}\cos qt,\ e^{pt}\sin qt)$

$$= \begin{vmatrix} e^{pt}\cos qt & e^{pt}\sin qt \\ (p\cos qt - q\sin qt)e^{pt} & (p\sin qt + q\cos qt)e^{pt} \end{vmatrix}$$

$$= e^{pt}\cdot e^{pt}\begin{vmatrix} \cos qt & \sin qt \\ p\cos qt - q\sin qt & p\sin qt + q\cos qt \end{vmatrix}$$

$$= e^{2pt}\{\cos qt\,(p\sin qt + q\cos qt) - \sin qt\,(p\cos qt - q\sin qt)\}$$

$$= e^{2pt}\{q\cos^2 qt + q\sin^2 qt\}$$

$$= qe^{2pt}(\cos^2 qt + \sin^2 qt) = \boldsymbol{qe^{2pt}}$$

$q \neq 0$であるから，qe^{2pt}が恒等的に0になることはない．

したがって，関数$e^{pt}\cos qt$，$e^{pt}\sin qt$は線形独立である．

問４

（１）$x = \cos t$について

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos t$$

よって，与えられた微分方程式に代入すると

左辺$= -\cos t + \cos t = 0 =$右辺

したがって，$x = \cos t$は与えられた微分方程式の解である．

同様に，$x = \sin t$について

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin t$$

よって，与えられた微分方程式に代入すると

左辺$= -\sin t + \sin t = 0 =$右辺

したがって，$x = \sin t$は与えられた微分方程式の解である．

また，ロンスキアンは

$$W(\cos t,\ \sin t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

以上より，$\cos t$と$\sin t$は線形独立な解である．

（２）$\cos t$と$\sin t$は線形独立な解であるから，

一般解は

$\boldsymbol{x = C_1\cos t + C_2\sin t}$**（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問５

（１）$x = t^2$について，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2$

よって，与えられた微分方程式に代入すると

左辺$= 2 + t^2 = t^2 + 2 =$右辺

よって，$x = t^2$は，与えられた微分方程式の解である．

（２）問４より，斉次の場合の解が

$x = C_1\cos t + C_2\sin t$

また，非斉次の場合の１つの解が，$x = t^2$であるから，

一般解は

$\boldsymbol{x = t^2 + C_1\cos t + C_2\sin t}$**（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問６

（１）特性方程式$\lambda^2-2\lambda-3=0$を解くと

$(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

$\lambda=-1,\ 3$

よって，一般解は

$\boldsymbol{x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

（２）特性方程式$\lambda^2+4\lambda=0$を解くと

$\lambda(\lambda+4)=0$

$\lambda=-4,\ 0$

よって，一般解は

$x=C_1e^{-4t}+C_2e^0$

$\boldsymbol{x=C_1e^{-4t}+C_2}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

（３）特性方程式$\lambda^2-2\lambda+1=0$を解くと

$(\lambda-1)^2=0$

$\lambda=1$（２重解）

よって，一般解は

$\boldsymbol{x=(C_1+C_2t)e^t}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

（４）特性方程式$\lambda^2+4=0$を解くと

$\lambda^2=-4$

$\lambda=\pm 2i$

よって，一般解は

$x=e^0(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$

$\boldsymbol{x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

（５）特性方程式$\lambda^2-2\lambda-2=0$を解くと

$\lambda=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}$

$\quad=1\pm\sqrt{3}$

よって，一般解は

$\boldsymbol{x=C_1e^{(1+\sqrt{3})t}+C_2e^{(1-\sqrt{3})t}}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

（６）特性方程式$\lambda^2-4+5=0$を解くと

$\lambda=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 5}$

$\quad=2\pm\sqrt{-1}$

$\quad=2\pm i$

よって，一般解は

$\boldsymbol{x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)}$**（$\boldsymbol{C_1,\ C_2}$は任意定数）**

問７

特性方程式$\lambda^2-1=0$を解くと

$\lambda=\pm 1$

よって，一般解は

$x=C_1e^t+C_2e^{-t}$（$C_1,\ C_2$は任意定数）・・・①

（１）$x=C_1e^t+C_2e^{-t}$より

$\dfrac{dx}{dt}=C_1e^t-C_2e^{-t}$・・・②

①と②に条件を代入して

$$\begin{cases}0=C_1e^0+C_2e^0\\4=C_1e^0-C_2e^0\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}0=C_1+C_2\\4=C_1+C_2\end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$C_1=2,\ C_2=-2$

よって，求める解は

$\boldsymbol{x=2e^t-2e^{-t}}$

（２）①に条件を代入すると

$$\begin{cases}0=C_1e^0+C_2e^0\\1=C_1e^1+C_2e^{-1}\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}0=C_1+C_2 & \cdot\cdot\cdot ③\\1=C_1e+C_2e^{-1} & \cdot\cdot\cdot ④\end{cases}$$

③より，$C_1=-C_2$

これを，②に代入して

$1=-C_2e+C_2e^{-1}$

$1=C_2(-e+e^{-1})$

$\dfrac{1}{-e+e^{-1}}=C_2$

$$C_2=-\frac{1}{e-e^{-1}}$$

$$C_1=-C_2=\frac{1}{e-e^{-1}}$$

これらを，①に代入すると

$$x=\frac{1}{e-e^{-1}}\cdot e^t-\frac{1}{e-e^{-1}}\cdot e^{-t}$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x=\frac{e^t-e^{-t}}{e-e^{-1}}}$$

問8

（１）特性方程式$\lambda^2+2\lambda-8=0$を解くと

$(\lambda-2)(\lambda+4)=0$

$\lambda=2,\ -4$

よって，斉次方程式の一般解は

$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-4t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x=At+B$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=A$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$0+2A-8(At+B)=4t-3$$
$$2A-8At-8B=4t-3$$
$$-8At+(2A-8B)=4t-3$$

よって

$$\begin{cases}-8A=4\\2A-8B=-3\end{cases}$$

これを解いて，$A=-\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{4}$

したがって，１つの解は

$$x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+C_1e^{2t}+C_2e^{-4t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（２）特性方程式$\lambda^2-2\lambda+3=0$を解くと

$$\lambda=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}$$
$$=1\pm\sqrt{-2}$$
$$=1\pm\sqrt{2}i$$

よって，斉次方程式の一般解は

$x=e^t\left(C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t\right)$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x=At^2+Bt+C$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=2At+B$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2A$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$2A-2(2At+B)+3(At^2+Bt+C)=3t^2+2t$$
$$2A-4At-2B+3At^2+3Bt+3C=3t^2+2t$$
$$3At^2+(-4A+3B)t+(2A-2B+3C)=3t^2+2t$$

よって

$$\begin{cases}3A=3\\-4A+3B=2\\2A-2B+3C=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=1$，$B=2$，$C=\dfrac{2}{3}$

したがって，１つの解は

$$x=t^2+2t+\frac{2}{3}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=t^2+2t+\frac{2}{3}+e^t\left(C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t\right)}$$

（C_1，C_2は任意定数）

問9

（１）特性方程式$\lambda^2-2\lambda+5=0$を解くと

$$\lambda=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot5}$$
$$=1\pm\sqrt{-4}$$
$$=1\pm2i$$

よって，斉次方程式の一般解は

$x=e^t(C_1\cos2t+C_2\sin2t)$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x=Ae^{2t}$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=2Ae^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4Ae^{2t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$4Ae^{2t}-2\cdot2Ae^{2t}+5Ae^{2t}=e^{2t}$$
$$5Ae^{2t}=e^{2t}$$

よって，$A=\dfrac{1}{5}$

したがって，１つの解は

$$x=\frac{1}{5}e^{2t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{5}e^{2t}+e^t(C_1\cos2t+C_2\sin2t)}$$

（C_1，C_2は任意定数）

（２）特性方程式$\lambda^2+2\lambda+1=0$を解くと

$(\lambda+1)^2=0$

$\lambda=-1$（２重解）

よって，斉次方程式の一般解は

$x=(C_1+C_2t)e^{-t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x=Ae^{-3t}$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=-3Ae^{-3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=9Ae^{-3t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$9Ae^{-3t}+2\cdot(-3Ae^{-3t})+Ae^{-3t}=4e^{-3t}$

$4Ae^{-3t}=4e^{-3t}$

よって，$A=1$

したがって，１つの解は

$x=e^{-3t}$

以上より，求める一般解は

$\boldsymbol{x=e^{-3t}+(C_1+C_2t)e^{-t}}$ **（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）**

問 10

（１）特性方程式$\lambda^2-4\lambda+4=0$を解くと

$(\lambda-2)^2=0$

$\lambda=2$（２重解）

よって，斉次方程式の一般解は

$x=(C_1+C_2t)e^{2t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x=A\cos t+B\sin t$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=-A\sin t+B\cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-A\cos t-B\sin t-4(-A\sin t+B\cos t)+4(A\cos t+B\sin t)=\sin t$$

$$(-A-4B+4A)\cos t+(-B+4A+4B)\sin t=\sin t$$

$(3A-4B)\cos t+(4A+3B)\sin t=\sin t$

よって

$$\begin{cases}3A-4B=0\\4A+3B=1\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{4}{25}$，$B=\dfrac{3}{25}$

したがって，１つの解は

$$x=\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+(C_1+C_2t)e^{2t}}$$

（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）

（２）特性方程式$\lambda^2+2\lambda=0$を解くと

$\lambda(\lambda+2)=0$

$\lambda=-2$，0

よって，斉次方程式の一般解は

$x=C_1e^{-2t}+C_2e^0=C_1e^{-2t}+C_2$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x=A\cos 2t+B\sin 2t$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=-2A\sin 2t+2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-4A\cos 2t-4B\sin 2t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-4A\cos 2t-4B\sin 2t+2(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)=3\cos 2t$$

$(-4A+4B)\cos 2t+(-4A-4B)\sin 2t=3\cos 2t$

よって

$$\begin{cases}-4A+4B=3\\-4A-4B=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=-\dfrac{3}{8}$，$B=\dfrac{3}{8}$

したがって，１つの解は

$$x=-\frac{3}{8}\cos t+\frac{3}{8}\sin t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{3}{8}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t+C_1e^{-2t}+C_2}$$

（$\boldsymbol{C_1}$，$\boldsymbol{C_2}$は任意定数）

問 11

２式を，上から①，②とする．

②より，$x=-\frac{dy}{dt}+\sin t$ ・・・②′

②′をtで微分すると，$\frac{dx}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t$

これを，①に代入すると

$$-\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t=4y-\cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=2\cos t \quad ・・・③$$

③の特性方程式$\lambda^2+4=0$を解くと，$\lambda=\pm 2i$

であるから，斉次の場合の一般解は

$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$（C_1，C_2は任意定数）

また

③の１つの解を，$y=A\cos t+B\sin t$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dy}{dt}=-A\sin t+B\cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$$

これを，③に代入すると

$-A\cos t-B\sin t+4(A\cos t+B\sin t)=2\cos t$

$3A\cos t+3B\sin t=2\cos t$

よって

$$\begin{cases}3A=2\\3B=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=\frac{2}{3}$，$B=0$

したがって，１つの解は

$$y=\frac{2}{3}\cos t$$

よって，yの一般解は

$$y=\frac{2}{3}\cos t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$$

また，これをtについて微分すると

$\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{3}\sin t-2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t$ であるから

これを②’に代入して

$$x=-\left(-\frac{2}{3}\sin t-2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t\right)+\sin t$$

$$=\frac{5}{3}\sin t+2C_1\sin 2t-2C_2\cos 2t$$

以上より

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\sin t+2C_1\sin 2t-2C_2\cos 2t}\\\boldsymbol{y=\frac{2}{3}\cos t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t}\end{cases}$$

（C_1，C_2は任意定数）

問 12

（１）両辺をt^2で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{t^2}x=0$$

$x=t^\alpha$の形の解があると予想し，tで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1},\ \frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$t^2\cdot\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t\cdot\alpha t^{\alpha-1}-t^\alpha=0$

$\alpha(\alpha-1)t^\alpha+\alpha t^\alpha-t^\alpha=0$

$\{\alpha(\alpha-1)+\alpha-1\}t^\alpha=0$

$(\alpha^2-1)t^\alpha=0$

$\alpha^2-1=0$

よって，$\alpha=\pm 1$

したがって，tとt^{-1}は与えられた微分方程式の解であり，かつ線形独立である．※問３（２）より

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x=C_1t+C_2t^{-1}}$**（$C_1$，$C_2$は任意定数）**

（２）両辺をt^2で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+-\frac{2}{t^2}x=0$$

$x=t^\alpha$の形の解があると予想し，tで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\alpha t^{\alpha-1},\ \frac{d^2x}{dt^2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$t^2\cdot\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}-2t^\alpha=0$

$\alpha(\alpha-1)t^\alpha-2t^\alpha=0$

$\{\alpha(\alpha-1)-2\}t^\alpha=0$

$(\alpha^2-\alpha-2)t^\alpha=0$

$\alpha^2-\alpha-2=0$

$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$

よって，$\alpha=-1$，2

したがって，t^{-1}とt^2は与えられた微分方程式の解であり，　かつ線形独立である．※問３（２）より

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x=C_1t^{-1}+C_2t^2}$**（$C_1$，$C_2$は任意定数）**